

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----

Trần Huy Cường

CHUỖI ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP  
VÀ DÃY CÁC SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----

Trần Huy Cường

**CHUỖI ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP  
VÀ DÃY CÁC SỐ NGUYÊN**

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp  
Mã số: 8460113

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học:  
**PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI**  
**TS ĐOÀN QUANG MẠNH**

Thái Nguyên - 2020

# Danh mục hình

1.1	Ba chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác . . . . .	4
1.2	Chuỗi đường tròn tiếp xúc hai đường thẳng . . . . .	5
1.3	Ba chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác $(a, b, c) = (14, 9, 9)$ . . . . .	7
1.4	Tam giác suy biến và 3 chuỗi đường tròn . . . . .	8
1.5	Tứ giác nội tiếp và các chuỗi đường tròn nội tiếp . . . . .	9
1.6	Hình thoi với các chuỗi đường tròn nội tiếp . . . . .	16
1.7	Hình thang cân với các chuỗi đường tròn nội tiếp . . . . .	17
2.1	Chuỗi đường tròn nội tiếp hình viên phân . . . . .	19
2.2	$A, P, Q$ thẳng hàng . . . . .	20
2.3	Tâm các đường tròn của chuỗi nằm trên parabol . . . . .	21
2.4	Các tiếp điểm nằm trên $\sphericalcap GLH$ của $(A, AG)$ . . . . .	22
2.5	Xác định tâm và bán kính đường tròn thứ $i$ . . . . .	24
2.6	Một số đường tròn của chuỗi và ảnh nghịch đảo . . . . .	27
2.7	Ảnh nghịch đảo của $C_0, C_{-1}, C_1$ . . . . .	29
2.8	Chuỗi thấu kính . . . . .	34
2.9	Hai trường hợp đặc biệt của $y_0$ . . . . .	35
2.10	Hai trường hợp đặc biệt của $y_0$ . . . . .	36
2.11	Ảnh nghịch đảo của các đường tròn trong chuỗi thấu kính . . . . .	38
2.12	Hình mặt trăng và chuỗi đường tròn nội tiếp . . . . .	43
2.13	Đường tròn nội tiếp hình mặt trăng và ảnh nghịch đảo . . . . .	47
3.1	Tính tỷ số $\frac{p^2}{\sigma}$ . . . . .	54
3.2	Bổ đề 3.1 . . . . .	55
3.3	Tồn tại vô hạn các chuỗi đường tròn . . . . .	57
3.4	Hai đường tròn $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ đồng tâm . . . . .	58

3.5	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ở ngoài nhau . . . . .	59
3.6	Chuỗi đường tròn nội tiếp trong một parabol . . . . .	60
3.7	Các đường tròn Fibonacci . . . . .	61
3.8	Các đường tròn Fibonacci . . . . .	63

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác và tứ giác</b>	<b>3</b>
1.1	Chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác . . . . .	3
1.2	Chuỗi đường tròn nội tiếp tứ giác . . . . .	9
1.3	Điều kiện để có dãy số nguyên . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Chuỗi đường tròn nội tiếp một bộ phận hình tròn</b>	<b>18</b>
2.1	Hình cơ sở là hình viên phân . . . . .	18
2.1.1	Định nghĩa, tính chất . . . . .	18
2.1.2	Dãy số nguyên sinh ra từ chuỗi viên phân . . . . .	25
2.2	Hình cơ sở là hình thấu kính đối xứng . . . . .	33
2.2.1	Định nghĩa và các tính chất . . . . .	33
2.2.2	Điều kiện để $\tau_k$ là dãy số nguyên . . . . .	39
2.3	Hình cơ sở là hình mặt trăng . . . . .	43
2.3.1	Một số định nghĩa và hệ thức . . . . .	44
2.3.2	Điều kiện để $\tau_k$ là dãy số nguyên . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Một số vấn đề liên quan</b>	<b>51</b>
3.1	Chuỗi đường tròn sinh ra từ dãy số . . . . .	51
3.2	Chuỗi đường tròn và phép nghịch đảo . . . . .	53
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>66</b>

# Mở đầu

## 1. Mục đích của đề tài luận văn

Trong luận văn "Một số vấn đề mới trong hình học arbelos và ứng dụng" (đã bảo vệ năm 2019, tại Đại học khoa học, Đại học Thái nguyên) Nguyễn Sơn Hải đã trình bày một vài tính chất của chuỗi đường tròn nội tiếp hình arbelos, hình tạo bởi ba nửa đường tròn mà có thể hình dung như một tam giác cong. Bài toán đặt ra là: chuỗi các đường tròn nội tiếp một tam giác, một tứ giác hay chuỗi đường tròn nội tiếp một bộ phận hình tròn có những tính chất gì đặc biệt? Có hay không mối liên hệ giữa các chuỗi đó với dãy các số nguyên tương ứng? Trình bày cách giải quyết các bài toán trên là lý do để tôi chọn đề tài "**Chuỗi đường tròn nội tiếp và dãy các số nguyên**". Mục đích của đề tài là:

- Xây dựng chuỗi các đường tròn tiếp xúc 2 đường thẳng cắt nhau, từ đó có ba chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác và bốn chuỗi đường tròn nội tiếp tứ giác. Tìm mối liên hệ giữa chuỗi các đường tròn này và dãy số nguyên tương ứng.

- Trình bày chuỗi các đường tròn nội tiếp trong các hình cơ sở: hình viên phân, hình thấu kính, hình mặt trăng. Mỗi trường hợp cụ thể nêu ra được các tính chất đặc biệt của chuỗi, dựng được các dãy số nguyên sinh bởi các chuỗi tương ứng, phát biểu và chứng minh điều kiện cần và đủ để có dãy số nguyên.

- Đề cập đến các ứng dụng của chuỗi đường tròn: các bài toán liên quan đến các chuỗi đang xét và áp dụng phép nghịch đảo để chứng minh.

- Bồi dưỡng năng lực dạy các chuyên đề khó ở trường THCS và THPT góp phần đào tạo học sinh học giỏi môn Hình học.

## 2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Kết hợp giữa phương pháp hình học truyền thống, phương pháp véc tơ, phương pháp tọa độ, phương pháp biến hình, đề tài đi sâu vào nghiên cứu một số chuỗi đường tròn nội tiếp trong các hình: tam giác, tứ giác, hình viên phân, hình thấu kính, hình mặt trăng. Một cách tự nhiên, đi tìm các điều kiện để có các dãy số nguyên tương ứng sinh ra từ dãy tỷ số các bán kính. Nội dung luận văn được tham khảo chủ yếu trong các bài báo của Giovanni Lucca: [2], [4], [5] và được chia làm 3 chương:

### Chương 1. Chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác và tứ giác

Từ bỏ đề quan trọng về đường tròn tiếp xúc 2 cạnh của một góc đề tài phát triển thành ba chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác và bốn chuỗi đường tròn nội tiếp tứ giác dựa vào một đường tròn nội tiếp. Mỗi trường hợp đều phát biểu và chứng minh các tính chất đặc trưng của chuỗi. Trong những trường hợp cụ thể tìm được dãy số nguyên tương ứng về tỷ số các bán kính đường tròn trong chuỗi. Nội dung tham khảo và tổng hợp từ bài báo [5], bao gồm 3 mục sau:

- 1.1. Chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác
- 1.2. Chuỗi đường tròn nội tiếp tứ giác
- 1.3. Điều kiện có dãy số nguyên

### Chương 2. Chuỗi đường tròn nội tiếp trong một bộ phận hình tròn

Xét 3 hình cơ sở cụ thể, mỗi trường hợp đều tìm ra tính chất đặc trưng và điều kiện tồn tại dãy số nguyên tương ứng. Nội dung tổng hợp từ các bài báo [1], [2], [4] và chi tiết hóa các phép chứng minh. Chương này bao gồm các mục sau:

- 2.1. Hình cơ sở là hình viên phân
- 2.2. Hình cơ sở là hình thấu kính
- 2.3. Hình cơ sở là hình mặt trăng

### **Chương 3. Một số vấn đề liên quan**

Ứng dụng các khảo sát của chương 1 và chương 2, chúng tôi xét một số bài toán liên quan đến chuỗi đường tròn nội tiếp khác, một cách tự nhiên luận văn cũng đề cập đến bài toán ngược: từ các dãy số nguyên xây dựng được các chuỗi đường tròn tương ứng. Nội dung chương 3 bao gồm:

- 3.1. Chuỗi đường tròn sinh ra từ dãy số
- 3.2. Chuỗi đường tròn và phép nghịch đảo.



## Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành cảm ơn Phòng đào tạo và các quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K12B (2018 - 2020) Trường Đại học khoa Học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu của các môn học cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn nhiệt tình của PSG.TS. Nguyễn Việt Hải và TS. Đoàn Quang Mạnh trường Đại Học Hải Phòng. Tôi xin chân thành cảm ơn sâu sắc đến các thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều các thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới các đồng chí trong BGH Trường THCS Hồng Phong – Huyện An Dương và gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện Luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

*Hải Phòng, 04 tháng 12 năm 2020*  
*Người viết Luận văn*

*Trần Huy Cường*

# Chương 1

## Chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác và tứ giác

Ta định nghĩa chuỗi các đường tròn  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n, \dots$  nội tiếp hình  $\mathcal{H}$  là tập hợp các đường tròn mà mỗi đường tròn tiếp xúc trong hình  $\mathcal{H}$ , đồng thời tiếp xúc ngoài nhau theo thứ tự:  $\mathcal{C}_2$  tiếp xúc  $\mathcal{C}_1$  và  $\mathcal{C}_3$ ,  $\mathcal{C}_3$  tiếp xúc  $\mathcal{C}_2$  và  $\mathcal{C}_4$ ... Mỗi  $\mathcal{C}_i$  được gọi là một phần tử của chuỗi, hình  $\mathcal{H}$  được gọi là *hình cơ sở của chuỗi*.

### 1.1 Chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác

Trên Hình 1.1, ta có 3 chuỗi đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ , đường tròn chính ở đây được chọn là đường tròn  $(I, r)$  nội tiếp tam giác  $ABC$ . Việc dựng các đường tròn thuộc chuỗi rất đơn giản: ta coi là các đường tròn nội tiếp mỗi tam giác nhỏ, tâm nằm trên các đoạn thẳng  $IA, IB, IC$ . Ta nhận thấy bắt đầu từ đường tròn nội tiếp tam giác ta có ba chuỗi vô hạn các đường tròn có tính chất đường tròn thứ  $i$  tiếp xúc với các đường tròn thứ  $i - 1$  và  $i + 1$ , đồng thời tiếp xúc với hai cạnh tam giác. Ở đây ta sẽ tìm điều kiện đảm bảo tỷ số giữa bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn bất kỳ của dãy là một số nguyên.

Xét đường tròn  $\mathcal{C}_0$ , tâm  $A_0$  tiếp xúc với hai đường thẳng  $l, l'$  cắt nhau ở  $O$  ta dựng đoạn thẳng  $OA_0$ . Tiếp theo, tiến hành các bước dựng:

- (1) Đoạn  $OA_0$  cắt  $\mathcal{C}_0$  tại  $P_1$ .